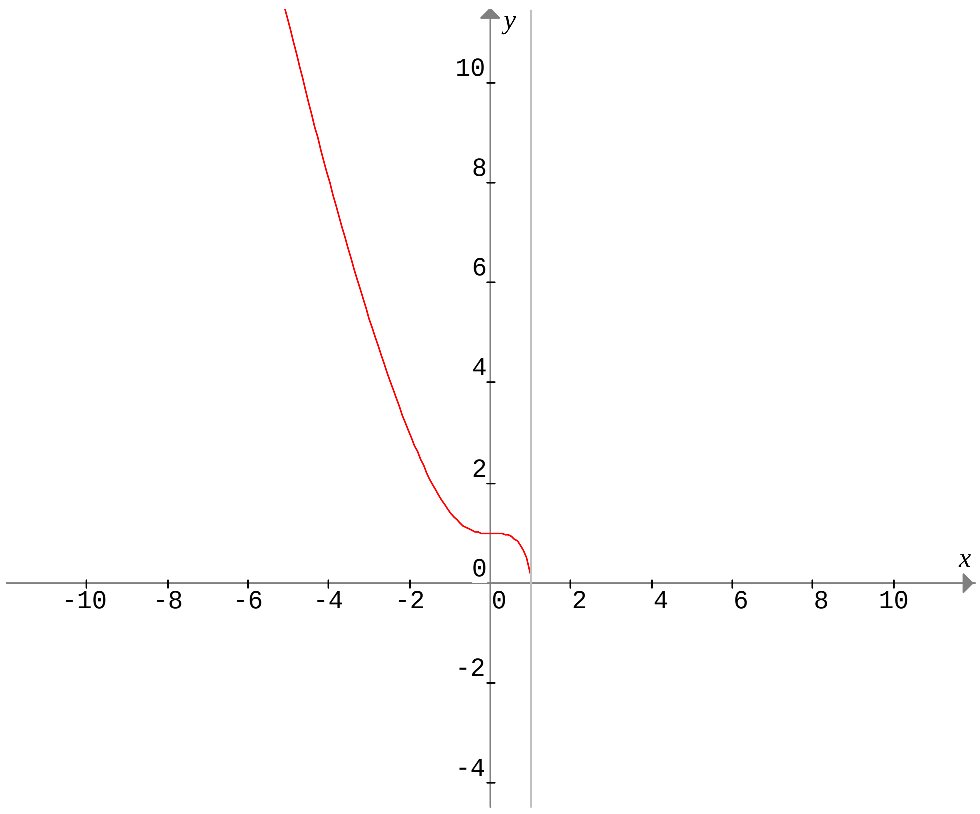
**STUDIO DI FUNZIONE: irrazionale intera**

| | |
|---|---|
| $y = f(x)$ | $y=\sqrt{1-x^3}$ |
| Simmetrie | Non ci sono simmetrie |
| Campo di Esistenza | $\text{CDE} = \{\forall x \in (-\infty, 1]\}$ |
| Eventuali intersezioni con gli assi coordinati | intersezione con l'asse x : $(1,0)$<br>intersezione con l'asse y : $(0,1)$ |
| segno della funzione | la funzione è positiva in : $x<1$ |
| comportamento agli estremi del dominio | $\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{1-x^3}=+\infty$ |
| eventuali asintoti | asintoti verticali: nessuno<br>asintoti orizzontali: nessuno<br>asintoti obliqui: nessuno |
| derivate | $y'=\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$ ; $y''=\dfrac{3}{4}\dfrac{x^4-4x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}$ |
| monotonia | la funzione è sempre decrescente in tutto il suo dominio |
| eventuali massimi e minimi relativi | minimo : nessuno<br>massimo : nessuno |
| concavità e convessità | la funzione presenta la concavità verso l'alto in : $-\infty<x<0$<br>la funzione presenta la concavità verso il basso in : $0<x<1$ |
| eventuali punti di flesso | punto di flesso discendente : $(0,1)$ |
| eventuali punti di non derivabilità | il punto di coordinate $(1,0)$ è un punto di non derivabilità (flesso a tangente verticale) |
| grafico |  |

**STUDIO DI FUNZIONE: irrazionale intera**

$y=\sqrt{1-x^3}$

**Simmetrie**

$y(-x)=\sqrt{1-(-x)^3}=\sqrt{1+x^3}$ . Poiché $y(x)\neq y(-x)$ non ci sono simmetrie rispetto all'asse *x*; inoltre poiché $-y(x)\neq y(-x)$ non ci sono simmetrie rispetto all'origine.

**Campo di Esistenza**

$y=\sqrt{1-x^3}$ è una funzione irrazionale intera, perciò basterà imporre che il radicando non sia negativo: $1-x^3\geq 0$. Risolviamo la disequazione scomponendo il prodotto notevole: $(1-x)(1+x+x^2)\geq 0$, il secondo fattore è sempre positivo, quindi: $(1-x)\geq 0$ , $x\leq 1$

Il CDE della funzione è allora costituito dall'intervallo:

$\text{CDE}=\{\forall x\in(-\infty,1]\}$.

**Intersezioni con gli assi coordinati**

Intersezione con l'asse x:

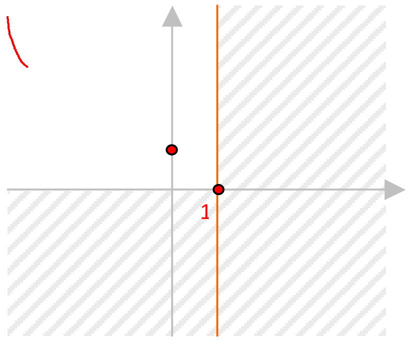
$$\begin{cases}y=\sqrt{1-x^3}\\y=0\end{cases},\ \begin{cases}\sqrt{1-x^3}=0\\y=0\end{cases},\ \begin{cases}1-x^3=0\\y=0\end{cases},\ \begin{cases}x^3=1\\y=0\end{cases},\ \begin{cases}x=1\\y=0\end{cases}$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse x è: $(1,0)$

Intersezione con l'asse y:

$$\begin{cases}y=\sqrt{1-x^3}\\x=0\end{cases},\ \begin{cases}y=1\\x=0\end{cases}.$$

Il punto in cui la curva interseca l'asse y è : $(0,1)$




**Segno della funzione**

Studiamo in quali intervalli la funzione è positiva, ovvero in quali regioni del CDE la funzione si dispone sopra l'asse delle ascisse:

$\sqrt{1-x^3}>0$ , $1-x^3>0$ , $x^3<1$ , $x<1$

La funzione risulta positiva per valori $x<1$.

**Studio del comportamento della funzione agli estremi del dominio attraverso il calcolo dei limiti.**

$$\lim_{x\to-\infty}\sqrt{1-x^3}=+\infty.$$

**Asintoti verticali**

Dall'esame del CDE e dal calcolo dei limiti che tendono ad $\infty$ si desume che non ci sono asintoti verticali.

**Asintoti orizzontali**

Dal calcolo del limite $\lim_{x\to\infty}\sqrt{1-x^3}=\infty$, si deduce che non ci sono asintoti orizzontali per la curva.

**Calcolo delle derivate**

$y'=\dfrac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}$ ; il CDE della derivata prima è $(-\infty,1)$. Nel punto di ascissa $x=1$, la derivata prima non esiste, quindi il punto è di *non derivabilità*. Studieremo più avanti di che tipo.

$$y''=-\frac{3}{2}\left[\frac{2x\sqrt{1-x^3}-x^3\dfrac{1}{\sqrt{1-x^3}}(-3x^2)}{1-x^3}\right]=-\frac{3}{2}\left[\frac{4x(1-x^3)+3x^4}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}\right]=-\frac{3}{4}\frac{4x-x^4}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}=\frac{3}{4}\frac{x^4-4x}{(1-x^3)\sqrt{1-x^3}}$$

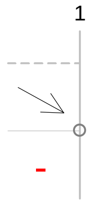
**Ricerca di eventuali punti di massimo o minimo relativi**

$$y'=0\quad\Rightarrow\quad\frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}}=0,\quad -3x^2=0,\quad x=0.$$

Nel punto di ascissa $x=0$ esiste un probabile massimo o minimo, o un flesso.
Per saperne di più studiamo la monotonia della funzione.

**Studio della monotonia**

$$y' > 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{-3x^2}{2\sqrt{1-x^3}} > 0 \qquad \begin{array}{llll} \mathrm{N}>0 & -3x^2>0 & x^2<0 & \text{mai verificato} \\ \mathrm{D}>0 & 2\sqrt{1-x^3}>0 & 1-x^3>0 & x<1 \end{array}$$




quindi la funzione è sempre decrescente per valori $x<1$, ovvero in tutto il suo Campo di Esistenza.
Questo assicura che non esiste un punto di minimo relativo per la funzione.

**Ricerca di eventuali punti di flesso**

$$y''=0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\frac{x^4-4x}{\left(1-x^3\right)\sqrt{1-x^3}}=0, \quad x^4-4x=0, \quad x\left(x^3-4\right)=0, \quad x=0 \quad e \quad x=\sqrt[3]{4}\left(\cong 1{,}58\right)$$ sono le due soluzioni. La seconda, maggiore di 1, esula dal CDE.
L'ascissa del probabile punto di flesso è $x=0$.

**Studio della concavità**

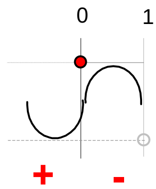
$$y''>0 \quad \Rightarrow \quad \frac{3}{4}\frac{x^4-4x}{\left(1-x^3\right)\sqrt{1-x^3}}>0$$

esaminiamo i fattori che compongono la derivata seconda: $\frac{3}{4}$ è sempre positivo, $\left(1-x^3\right)$ è sempre positivo, $\sqrt{1-x^3}$ è sempre positivo. Quindi studiamo solo il segno del fattore $x^4-4x$;

$$y''>0 \quad \Rightarrow x^4-4x>0, \quad x\left(x^3-4\right)>0$$

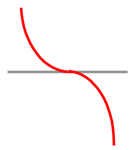
$$F_1>0 \quad \Rightarrow x>0$$

$$F_2>0 \quad \Rightarrow x^3-4>0, \quad x^3>4, \quad x>\sqrt[3]{4} \quad \left(\cong 1{,}58\right)$$




La curva quindi presenta la concavità verso l'alto in : $-\infty<x<0$,
mentre presenta la concavità verso il basso in : $0<x<1$.
Il punto di ascissa 0 è un punto di flesso a tangente orizzontale.
Calcoliamo ora le ordinate del punto di flesso sostituendo il valore ottenuto nella funzione:
$y=\sqrt{1-0}=1$.

Per cui il punto di coordinate $(0,1)$ è un flesso discendente.



**Studio dei punti di non derivabilità**

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{1-x^3}-0}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{(1-x)\left(1+x+x^2\right)}{(1-x)^2}}=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{\frac{\left(1+x+x^2\right)}{(1-x)}}=+\infty,$$

allora nel punto di ascissa $x=1$ c'è un flesso a tangente verticale, la cui ordinata è $y=0$.